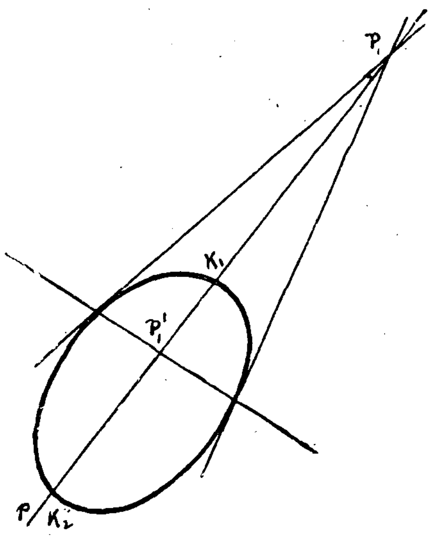
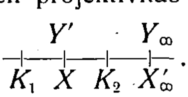
AZ EGYENESEN ÉS A PONTON LEVŐ INVOLÚCIÓ

ÍRTA: LERNER KÁROLY

Metszen d egyenes egy kúpszeletet. Vegyünk fel p egyenesen P_1 pontot. Ebből két érintőt húzzunk a kúpszelethez. Az érintési pontokat összekötő egyenes P_1 pontnak polárisa. p metszi P_1 pont polárisát P_1' pontban. Ezen két pontnak az a sajátsága, hogy harmonikusan választják szét a kúpszeletnek p egyenessel való metszéspontjait: $(K_1 K_2 P_1 P_1') = -1$.

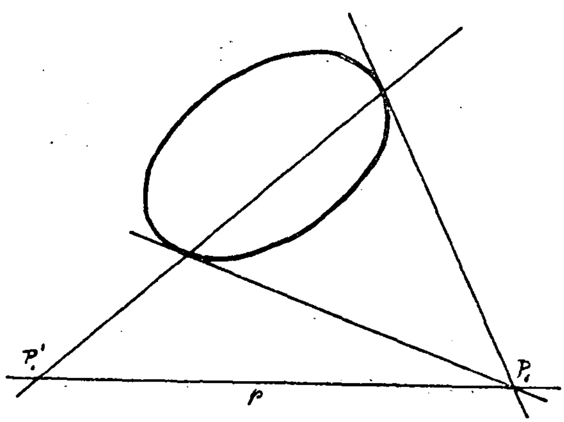


Ha P_1 mozog, p egyenesen két projektív pontsor jön létre $P_1 P_2 P_3 \ldots \barwedge P_1' P_2' P_3' \ldots$ Homológ pontpárok harmonikusan választják szét a kúpszelet $K_1 K_2$ pontjait. K_1 társa K_1 és K_2 társa K_2. Ez egy olyan projektivitás, melyben a homológ pontpároknak a kettőspontokkal való kettősviszonya -1, azaz az abszolút invariáns: -1. Az ilyen projektivitás neve involúció.



Ha X a két kettősp[illegible]zötti szegmentum közepén van, társa Y a végtelenben van. Ekkor $(K_1 K_2 X Y) = -1$. Ha X mozog, eljut a ∞-be X'-be, Y is mozog, eljut Y'-be: $(K_1 K Y X) = -1$. De az is igaz $(K_1 K_2 Y' Y) = -1$ $(K_1 K_2 X X') = -1$ és így igaz $(K_1 K_2 Y X) = -1$. Ez jellemzi az involúciót. Ha egy pontsoron levő projektivitásban van egy pont, melynek társa ugyanaz, akár X, akár Y pontsorhoz számítjuk ezt a pontot, akkor a projektivitást involúciónak nevezzük. Ezt az involúciót az egyenesen a kúpszelet létesítette. Ha megjelenik a síkban egy kúpszelet, ezzel az egyenesen egy involúció jelenik meg.

Ha p egyenes nem metszi a kúpszeletet, akkor is megvan az involúció. Felveszek rajta P_1 pontot. Ennek megszerkesztem a polárisát. Ez kimetsz p-ből P_1' pontot. Ezek konjugáltak. Ha P_1 mozog, p egyenesen létrejön: $p(P_1 P_2 P_3 \ldots) \barwedge p(P_1' P_2' P_3' \ldots)$ két pontsor, amely projektív. P_1 és P_1' harmonikusan választják szét p egyenesnek a kúpszelettel való metszéspontjait. Most a két metszéspont képzetes.

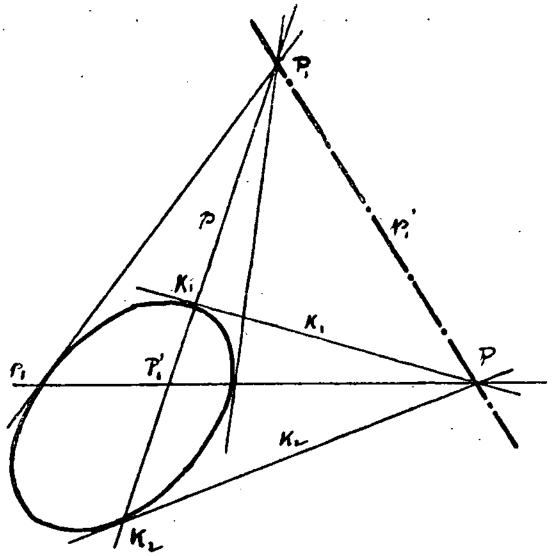


Ha p egyenes éppen az érintő, akkor P_1 pont konjugáltja az érintési pontba esik.

A kúpszelet tehát minden egyenesen létesít projektivitást, melynek sajátsága az, hogy a homológ pontpárok a kúpszeletnek p egyenessel való metszéspontjait harmonikusan választják szét, tehát a projektivitás involúció. Az involúció lehet hiperbolikus, parabolikus, vagy elliptikus, aszerint, hogy p metszi, érinti, vagy nem metszi a kúpszeletet. Eszerint azután az egyenest hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus egyenesnek nevezzük.

A ponton levő involúció. Ha megadunk egy kúpszeletet, a centrumban létrejön az involúció. Ami érvényes volt egyenesre, érvényes lesz pontra is. Nézzük, hogyan jön létre ponton involúció. Ha p egyenesen felveszünk P_1 pontot és megszerkesztem annak polárisát, ez metszi p egyenest P_1' pontban. Ha P_1 mozog, létrejön $p(P_1 P_2 P_3 \ldots) \barwedge p P_1 P_2' P_3' \ldots)$ projektivitás, amelyben P és P' harmonikusan választják szét a kúpszeletnek p egyenessel való metszéspontjait, azaz: $(K_1 K_2 P_1 P_1') = -1$. Ha a betűket felcserélem: $P(p_1 p_2 p_3 \ldots) \barwedge P(p_1' p_2' p_3') \ldots$ vagyis P ponton létrejön két projektív sugársor. Ez a projektivitás involúció, mert az involúciós pont $(p_1 p_1')$-ön levő p_1 és p_1' harmonikusan választják szét k_1 és k_2 egyenest.

Ha P_1 mozog, vele mozog P_1' is, de akkor mozog p_1 és p_1' is. A mozgás úgy történik, hogy P_1 és P_1' konjugált társak maradnak, de akkor p_1 és p_1' is konjugált társak, amiket konjugált egyeneseknek nevezünk.



Amilyen az involúció p egyenesen, olyan az involúció P ponton is. A kúpszelet minden egyenesen és pólusán ugyanolyan involúciót létesít. $p_1 p_1'$ konjugáltak, ha a kúpszeletnek az általuk meghatározott ponton átmenő két egyenesét harmonikusan választják szét: $(k_1 k_2 p_1 p_1') = -1$. Két pont $P_1 P_1'$ konjugált a kúpszeletre nézve, ha az egyik rajta van a másiknak a polárisán. Két egyenes konjugált, ha az egyik rajta van a másik pólusán.

Az involúció egyenlete. Legyen adva három homológ pontpár egy egyenesen. Egy negyedik homológ pontpár XY. Ha ezek homológ pontpárok, teljesülnie kell: $(A_1 A_2 X A_3) = (B_1 B_2 Y B_3)$ egyenlőségnek. Vagy koordinátákkal kifejezve $\frac{a_1 - x}{x - a_2} : \frac{a_1 - a_3}{a_3 - a_2} = \frac{b_1 - y}{y - b_2} : \frac{b_1 - b_3}{b_3 - b_2}$. Rendezve ilyen alakban írható: $a_{11} xy + a_{12} x + a_{21} y + a_{22} = 0$. Ezt nevezzük a közös tartójú projektív pontosok egyenletének. A projektivitás egyenlete — mint látjuk — lineáris reláció Megfordítva, ha az egyenesen a homológ pontpárokat egy lineáris reláció köti össze, akkor a homológ pontpárok projektív rokonságot létesítenek, azaz olyat amelyben a homológ négyesek kettősviszonya ugyanaz: $(x_1 x_2 x_3 x_4) = (y_1 y_2 y_3 y_4)$. Az is kimutatható, hogy ez tartalmazza $a_{11} xy + a_{12} x + a_{21} y + a_{22} = 0$ egyenletet.

A projektivitás egyenletéből:

$$y = -\frac{a_{12} x + a_{22}}{a_{11} x + a_{21}}$$

$$(y_1 y_2 y_3 y_4) = \frac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2} : \frac{y_1 - y_4}{y_4 - y_2}$$

$$y_1-y_3=\frac{a_{12}x_1+a_{22}}{a_{11}x_1+a_{21}}-\frac{a_{12}x_3+a_{22}}{a_{11}x_3+a_{21}}$$

$$y_3-y_2=\frac{a_{12}x_3+a_{22}}{a_{11}x_3+a_{21}}-\frac{a_{12}x_2+a_{22}}{a_{11}x_2+a_{21}}$$

A kettő hányadosa:

$$\frac{y_1-y_3}{y_3-y_2}=\frac{x_1-x_3}{x_3-x_2}$$

Ugyanúgy belátható, hogy:

$$\frac{y_1-y_4}{y_4-y_2}=\frac{x_1-x_4}{x_4-x_2}$$

Ezzel igazoltuk, hogy:

$$(x_1x_2x_3x_4)=(y_1y_2y_3y_4).$$

A projektivitás egyenlete tartalmazza az összes projektív rokonságot:

Nézzük ezt az esetet:	Ekkor teljesül:
	$a_{11}xy+a_{12}x+a_{21}y+a_{22}=0$
a_1 társa b_1	$a_{11}a_1b_1+a_{12}a_1+a_{21}b_1+a_{22}=0$
a_2 társa b_2	$a_{11}a_2b_2+a_{12}a_2+a_{21}b_2+a_{22}=0$
a_3 társa b_3	$a_{11}a_3b_3+a_{12}a_3+a_{21}b_3+a_{22}=0$

Az ismeretlenek: $a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}$. Ha ezek nem mindegyike nulla, akkor ezen egyenletrendszernek csak akkor van megoldása, ha a determinánsa nulla.

$$\begin{vmatrix} xy & x & y & 1 \\ a_1b_1 & a_1 & b_1 & 1 \\ a_2b_2 & a_2 & b_2 & 1 \\ a_3b_3 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Ezt kifejtve lineáris relációt kapunk. Ha $a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}$ felveszi az összes értékeket, kapjuk az összes projektív rokonságot. A megoldásokat az első sorhoz tartozó aldeterminánsok adják.

Ha a közös tartón van olyan X pont, melynek társa Y-al összeesik, azaz $X=Y$, akkor $a_{11}x^2+(a_{12}+a_{21})x+a_{22}=0$. Aszerint, hogy ezen egyenlet diszkriminánsa $\gtreqless 0$ beszélünk elleptikus (két képzetes kettőspont), parabolikus (két egybeeső kettőspont), vagy hiperbolikus (két valós kettőspont) projektivitásról.

Involúció esetén a projektivitás egyenletét alkalmazva $x'y'$-ra: $a_{11}x'y'+$ $+a_{12}x'+a_{21}y'+a_{22}=0$. Most azonban $x'=y$ és $y'=x$, tehát: $a_{11}xy+a_{12}y+$ $+a_{21}x+a_{22}=0$. Ezt kivonva a projektivitás egyenletéből: $a_{12}(x-y)-$ $-a_{21}(x-y)=0$. $x-y\neq 0$, tehát $a_{12}=a_{21}$ és így az involúció egyenlete így alakul: $a_{11}xy+a_{12}(x+y)+a_{22}=0$. A kettőspontokat meghatározó egyenlet $a_{11}x^2+2a_{12}x+a_{22}=0$. | ha van kettőspont, akkor $x=y$ |. Megoldása:

$$x=\frac{-2a_{12}\pm\sqrt{4a_{12}^2-4a_{11}a_{22}}}{2a_{11}}=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-A}}{a_{11}},\ \text{ahol } A=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}.$$

A diszkrimináns dönti el, hogy milyen az involúció, ha $A > o$, akkor elliptikus, ha $A = o$ parabolikus, ha $A < o$ hiperbolikus az involúció.

Az involúció iránya. $a_{11}xy + a_{12}(x+y) + a_{22} = 0$. Minden x-hez tartozik y. Ha $x = y$, akkor $a_{11}x^2 + 2a_{12}x + a_{22} = 0$. Ezen egyenlet diszkriminánsa:

$$A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \begin{cases} > o & \text{elliptikus involúció egyirányú} \\ = o & \text{parabolikus} \ \text{„} \quad \text{nincs irány} \\ < o & \text{hiperbolikus} \ \text{„} \quad \text{ellentétes irányú.} \end{cases}$$

Oldjuk meg első egyenletünket y-ra. $y = \dfrac{-(a_{12}x + a_{22})}{a_{11}x + a_{12}}$. Kérdés, ha x mozog, merre mozog társa y. Erre ad választ $\dfrac{dy}{dx}$ hányados.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a_{12}(a_{11}x + a_{12}) + a_{11}(a_{12}x + a_{22})}{(a_{11}x + a_{12})^2}.$$

Ha $\dfrac{dy}{dx}$ pozitív, akkor x és társa y egyirányban mozognak. Ha negatív, akkor ellenkező irányban mozognak, ha nulla, akkor nincs irány.

$$A \gtrless \begin{matrix} o \\ o \end{matrix}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{(a_{11}x + a_{12})^2}.$$

Az első esetben a számláló és a nevező pozitív, tehát egyirányú a mozgás, a második esetben a számláló negatív, a nevező pozitív, tehát ellentétes irányú a mozgás. Ha $A = 0$, akkor $\dfrac{dy}{dx} = 0$, tehát y állandó. Ha x el is mozdul, y állandó marad, tehát a két kettőspont Y-t közrefogja és nem engedi mozogni.

$$\begin{matrix} A & B \rightarrow & & A' & B' \rightarrow \\ \text{—|} & \text{——|——} & \text{————} & \text{|——} & \text{|——} \end{matrix}$$

Elliptikus involúció. A mozog, eljut B-be, ekkor A' is elmozdul B' felé. A mozgás egyirányú. A két pontpár azonban szétválasztja egymást. Ekkor kettőspont nem lehet. B' sohasem juthat A-ba. Amíg B átfutja a belső szegmentumot, addig B' a külső szegmentnmot írja le. Ebből is látható, hogy nem találkoznak. Tehát az elliptikus involúciót az jellemzi, hogy a mozgás egyirányú, AA' szétválasztja BB'-őt.

$$\begin{matrix} \leftarrow A & & B \rightarrow & & \leftarrow B' & & A' \rightarrow \\ \text{——|} & \text{————} & \text{|} & \text{————} & \text{|} & \text{————} & \text{|——} \end{matrix}$$

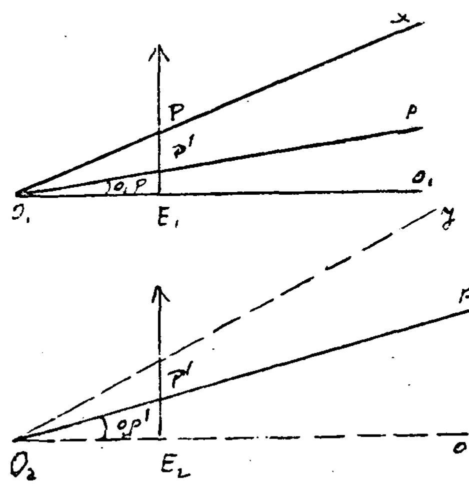
Hiperbolikus involúció. A mozgás ellentétes irányú. A mozog a külső szegmentumon, eljut A'-be, de akkor A' is elmozdul és eljut A-ba, közben találkoznak. Lesz kettőspont. A pontpárok egymást nem választják szét. Tehát ha a mozgás ellentétes irányú, a pontpárok egymást nem választják szét, akkor az involúció hiperbolikus.

$$\begin{matrix} AB & & A' & & B' \\ \text{——|} & \text{————} & \text{|} & \text{————} & \text{|——} \end{matrix}$$

Parabolikus involúció. A az érintési pont kettőspont. Ezt az jellemzi, hogy minden B'-nek társa A-ban van, ha B' elmozdul, társa akkor is A-ban marad.

Körös involúció, vagy abszolút involúció. Legyen adva a végtelen távoli egyenesen az involúció. A kettőspontjai legyenek a képzetes központok: $+i$ és $-i$. Adva van még P pólus és A pont. A kúpszelet átmegy a két képzetes körponton. Ez négy pontnak számít, mert a pólus is adva van, így megrajzolható a két érintő. Ez a kúpszelet kör, mert átmegy a két képzetes körponton. A végtelen távoli egyenes pólusa a centrum. Ez a kör még A ponton is átmegy.

A projektivitás egyenletéből eldönthető, hogy kúpszeletről van-e szó, vagy nem. Hogyan kell projektivitást létesíteni? Adva van O_1 és O_2. Ezen egy tetszőleges projektivitást létesítek. Ennek egyenlete tetszőleges, mert a projektivitás is az volt. $OE_1 = OE_2 = 1$. Két kordináta rendszert azért vettem, mert később két sugársorról lesz szó, ami igaz O_1 sugársoron, igaz O_2-re is. O_1 és O_2-őt úgy vettem fel, hogy egymás felett legyenek. Ezt megtehetem, mert ilyen helyzetben mindig elforgatható a sík úgy, hogy ha O_1 nincs O_2 felett, akkor föléje kerüljön. O_1-en felveszek egy tetszőleges sugarat. Ezen egy tetszőleges E_1 egységpontot $O_1E_1 = 1$ az E_1-ben o_1-re merőlegest rajzolok. Ezen merőleges egyenes minden P pontjának megvan a Descartes-féle koordinátája.



A sugársor és a számok között kölcsönös és egyértelmű vonatkozást létesítek. Minden E_1P számhoz tartozik egy sugár és minden sugárhoz tartozik egy E_1P szám. Ezen számokat nevezzük a sugár, ill. sugársor *Descartes*-féle koordinátájának. Minden sugár koordinátája helyett az iránytangensét vehetem: $p'(x = E_2P' = \operatorname{tg}(o_2p')\, p(x = E_1P' = \operatorname{tg}(o_1p))$. Most két sugár x és y között projektivitást létesítek. x-nek meg fog felelni egy sugár: $a_{11}xy + a_{12}x + a_{21}y + a_{22} = 0$. Ide x értékét beírva nyerem a hozzátartozó y-t. Ez a projektiviást független O_1 és O_2-től. Minden x-nek megfelel egy y, ha x-ek kielégítik az egyenletet. x jelenti az x egyenes iránytangensét, y jelenti az y egyenes iránytangensét. Ha $x = y$, akkor a két sugár x és y párhuzamos egymással. Kérdés most már az, hogy van-e olyan sugár, mely társával párhuzamos. Ha van ilyen, teljesül: $a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})x + a_{22} = 0$. Tehát csak két sugár van, mely társával párhuzamos, mégpedig ezen egyenlet két gyökéhez tartozó sugár. A megoldás

$$x = \frac{-(a_{12} + a_{21}) \pm \sqrt{a_{12} + a_{21})^2 - 4a_{11}a_{22}}}{2a_{11}}$$

$$x = \frac{-(a_{12}+a_{21}) \pm \sqrt{(a_{12}-a_{21})^2 - 4A}}{2a_{11}}, \text{ ahol } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Kérdés, milyen lesz most már a kúpszelet? Ha a gyökalatti pozitív, akkor két valós megoldás van, azaz a két párhuzamos egyenes két valós irányt határoz meg. Ekkor hiperbolát nyerek. Tehát, ha két pár párhuzamos egyenes van, akkor a kúpszelet hiperbola. Ha a gyök alatti negatív, akkor ellipszisről beszélünk, ekkor nincs párhuzamos egyenes-pár. Ha a gyök alatti zérus, akkor egy pár párhuzamos egyenes van, akkor a kúpszelet parabola.

A projektivitás lehet involúció. Ekkor $a_{12} = a_{21}$ és így

$$X = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{a_{11}}.$$

$$\text{Ha a gyökalatti: } a_{11}a_{12} - a_{12}^2 = \begin{cases} > o & \text{Ellipszis.} \\ : o & \text{Parabola adódik.} \\ < o & \text{Hiperbola.} \end{cases}$$

A kúpszeletet definiáló projektivitás legyen involúció. $a_{11}xy + a_{12}(x+y) + a_{22} = 0$. Ezen involúciónak homológ sugarai a kúpszeleten találkoznak. Kérdés, van-e ebben az involúcióban olyan sugár, mely társára merőleges és ha van, hány van? $x \perp y$, ha az iránycosinusok kompoziciója nulla:

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = 0 \quad 1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = 0, \; 1 + xy = 0.$$

Ebből, ha a homológ sugarak egymásra merőlegesek, $y = -\frac{1}{x}$. Kérdés, van-e olyan irány, mely társára merőleges? Behelyettesítve y értékét az egyenletbe: $a_{12}\left(x - \frac{1}{x}\right) + a_{22} - a_{11} = 0$. Nézzük, van-e valós megoldás? Azaz vannak-e az involúcióban egymásra merőleges társuk. Rendezve az egyenletet: $a_{12}x^2 + (a_{22} - a_{11})x - a_{12} = 0$.

A megoldás: $x = \dfrac{-(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}$

Tehát van merőleges sugárpár. Mégpedig kettő van, mert az egyenletnek két megoldása van. Tehát egy involúcióban mindig van egymásra merőleges sugárpár. Ez kimondja azt is, hogy a kúpszelet minden pontban, tehát a centrumban is létesít involúciót, és itt is van egymásra merőleges sugárpár. Ezek a főtengelyek.

Az egymásra merőleges sugárpár kielégíti az: $a_{12}\left(x - \frac{1}{x}\right) + a_{22} - a_{11} = 0$ egyenletet. Kérdés, van-e olyan involúció, melyben minden x merőleges társára? Ha van, akkor ezt az egyenletet minden x kielégíti. Ha egy másodfokú egyenletnek kettőnél több gyöke van, akkor minden együtthatója nulla. Tehát $a_{12} = 0$ és $a_{22} - a_{11} = 0$ és így $a_{22} = a_{11}$. Ekkor az involúcióban minden sugár társára merőleges. Ezt az involúciót nevezzük körös involúciónak, vagy abszolút involúciónak.

Nézzük most a körös involúció egyenletét: Az involúció egyenlete: $a_{11}xy + a_{12}(x+y) + a_{22} = 0$. Körös involúció esetén $a_{12} = 0$, $a_{22} = a_{11}$. Tehát a körös involúció egyenlete: $a_{11}xy + a_{11} = 0, xy + 1 = 0$. Mik lesznek a kettős elemek? Ha van kettős elem, akkor $x = y$, de akkor $x^2 + 1 = 0$. Ez azt jelenti, hogy $x = \pm i$, vagyis az involúcióban a kettős sugarak a képzetes körpontok felé mutató sugarak. Ha x forog, eljut x'-be, lesz társa y', mely x'-re merőleges. A homológ sugarak a képzetes körpontok felé mutató sugarakat mindig harmonikusan választják szét. Mindegy, hogy a társak egymásból indulnak-e ki, vagy sem. A körös involúcióban a sugarak csak akkor homológ sugarak, ha $+i$ és $-i$ felé mutató x és y sugarakat harmonikusan választják szét. Ez jellemzi az abszolút, vagy körös involúciót. Körnél a középponton átmenő egyenes metszi a kört két pontban. Ha ezt a két pontot a kör bármelyik kerületi pontjával összekötöm, a homológ sugárpár egyes sugarai merőlegesek lesznek egymásra. Ezt nevezik Thales tételnek.

Célom az volt, hogy az involúcióval kapcsolatban felvetett kérdések tárgyalásánál a lényeget nyújtsam és az involúció egyenletéből kiindulva az involúcióra jellemző megállapításokat mutassam be.

IRODALOM

[1] L., *Cremona:* Elemente der Projektivischen Geometrie. Stuttgart, 1882.

[2] *Dohlemann—Timerding:* Projektive Geometrie. Berlin, 1937.

[3] *F., Enriques:* Vorlesungen über projektive Geometrie. Leipzig, 1915.

[4] *Klug L.:* Projektiv geometria. Budapest, 1903.

[5] *H., Prüger:* Projektive Geometrie. Leipzig, 1935.

ИНВОЛЮЦИЯ НА ПРЯМОЙ И НА ПУНКТЕ

К. Лернер

Коническое сечение на каждой прямой образует инволюцию, которая может быть гиперболической, параболической или эллиптической зависимо от того, что прямая p пересекает, касает или не пересекает коническое сечение.

Потом статья трактует о том, как образуется инволюция на пункте. Автор после етого занимается уравнением и направлением инволюции. На это следует трактат об уравнении абсолютной инволюции и изучение того, есть-ли инволюции перендикулярная пара радиуса и если есть — сколько.

AUF DER GERADEN UND AUF DEM PUNKTE BEFINDLICHE INVOLUTION

von

K. LERNER

Der Kegelschnitt bringt auf jeder Geraden Involution zustande; diese kann hyperbolisch, parabolisch oder ellyptisch sein, je nachdem die Gerade p den Kegelschnitt schneidet, tangiert, oder nicht schneidet.

Ferner behandelt der Artikel die Frage, wie die Involution auf dem Punkte entsteht. Der Verfasser schreibt weiter über die Gleichung und Richtung der Involution. Darauf folgt die Behandlung und Untersuchung der Gleichung der absoluten Involution und die Untersuchung dessen, ob es in der Involution auf einander vertikale Strahlenpaare gibt, und wenn ja, wieviele.